STAT0008: Stochastic Processes

Homework 4 - Continuous-time Markov Chains

Lecturer: Weichen Zhao — Spring 2025

1. 阅读教材：例5.3(C)、例5.4(D)、例5.5(B)、5.6.1 串联排队系统

2. 设$N(t)$是参数为 λ 的 Poisson 过程, $X(t)$的状态空间为$\{-1,1\}$, 定义

$$X(t) \triangleq X(0)(-1)^{N(t)}$$

初始状态 $X(0)$ 为取值于 $\{-1,1\}$、服从两点分布的随机变量, 且与 $N(t)$ 统计独立，证明$X(t)$为一个连续时间Markov链，并计算其转移概率矩阵。

3. 教材：习题5.11

4. Ising模型的Glauber动力学是定义在构型空间上的连续时间Markov链，具有如下的转移速率矩阵

$$q_{\sigma\eta} := \begin{cases} c(i,\sigma) & \text{如果 } \eta = \sigma^i, \\ -\sum_i c(i,\sigma) & \text{如果 } \eta = \sigma \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

其中转移速率$c(i,\sigma)$有以下几种取法：

(1) $c(i,\sigma) = \min\{e^{-\beta(H(\sigma^i)-H(\sigma))}, 1\}$

(2) $c(i,\sigma) = \frac{1}{1+e^{\beta(H(\sigma^i)-H(\sigma))}} = \frac{e^{-\beta H(\sigma^i)}}{e^{-\beta H(\sigma)}+e^{-\beta H(\sigma^i)}}$.

(3) $c(i,\sigma) = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-\beta(H(\sigma^i)-H(\sigma))}\right]$.

证明：Boltzmann-Gibbs分布

$$P(\sigma) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)}}{Z}$$

是以上三种Glauber动力学的可逆分布

5. M/M/1 服务系统中，顾客到达率为λ, 平均服务时间为$1/\mu$, 现规定顾客在被服务结束后，以概率α离开系统，以概率$1-\alpha$重新再排队，于是一个顾客可以多次被服务。

(1) 建立系统的平衡方程，求系统进入平稳后各状态所取概率，说明存在统计平衡的条件。

(2) 计算顾客从进入系统后，一共被服务了n次的概率。

(3) 计算顾客被服务时间的平均值 (不包括该顾客在系统中排队等待的时间)。

(4) 计算顾客从进入系统起到第一次被服务所花费的排队时间的平均值。

(5) 计算顾客在系统中逗留时间的平均值 (包括该顾客在系统中排队等待的时间以及被服务的时间)。